自動証明における自然な三段論法の導入について : (LJ + 排中律)証明への変換アルゴリズムによる(数学基礎論とその応用)

大芝, 猛

数理解析研究所講究録
772巻 1991年 95-109

自動証明における自然な三段論法の導入について
((LJ+排中律)証明への変換アルゴリズムによる)

名工大 大芝 猛 (Takeshi Oshiba)

1階述語論理の与えられた論理式A_0に対し，妥当性検証手続を適用し，もし肯定的に終了するときには，そのとき得られるguide情報を利用し"$\to A_0$"に到るcut-freeなLK証明図を試行錯誤なく書き上げるアルゴリズムを提示した([1],[2])が，更に人間の理解しやすい証明形式(NK等)へ変換するアルゴリズムを連結し，自然な証明を一貫した自動証明手続きで得ることへのアプローチを問題とする。このとき問題となるのは，LK証明図の要素が$A_1,\cdots,A_m \to B_1,\cdots,B_n$のように，一般に右辺も複数個であるsequent(A_1 & $\cdots$ & $A_m \Rightarrow B_1$ or $\cdots$ or B_nの意味をもつ)で，各段階のLK推論が必らずしも自然で理解しやすいとはいえないことである。そこでLK証明図をまず"右辺が高々1つのLJ型sequent"と"排中律(型公理)"およびLJ型cut(三段論法)を用いる証明図(LJ+(排中律)型)に変換するアルゴリズムの1つを提示する。そしてこれによ

って得られた証明図が人による自然な証明の1つの型を近接していることを示す.

§ 1. 排中律及び三段論法を用いる証明の1つの型

人による証明の1例として次のものをとり上げる.

$\exists_x \forall_y (p(x) \supset p(y))$ ($: B$) の証明.

まず $\forall_z p(z)$ ($: E$) なる formula に着目する.

(case 1) $\forall_z p(z)$ ($: E$) が成立する場合: 任意の b に対し $p(b)$ が成立する. 従って,任意の a に対し $p(a) \supset p(b)$ 成立. 従って, $\forall_y (p(a) \supset p(y))$ 成立. 故に $\exists_x \forall_y (p(x) \supset p(y))$ 成立.

(case 2) $\neg \forall_z p(z)$ ($: \neg E$) が成立する場合: このとき同等な $\exists_z \neg p(z)$ ($: E'$) が成立. かかる z の1つを b とおく. 従って, $\neg p(b)$ 成立, このとき更に $p(b)$ を仮定すれば矛盾. 従って, 任意の c に対し $p(b) \supset p(c)$. 故に $\forall_y (p(b) \supset p(y))$. 従って $\exists_x \forall_y (p(x) \supset p(y))$ が成立.

即ち,(二者択一のいずれの場合にも) $\exists_x \forall_y (p(x) \supset p(y))$ ($: B$) 成立.

以上の証明を整理すると, 次のようになる.

まず, $E = \forall_z p(z)$ なる formula に着目.

1) $E \Rightarrow B$ 2) $\neg E \Rightarrow B$ を示す.

従って, $(E \vee \neg E) \Rightarrow B$ が成立.

一方, $E \vee \neg E$ (排中律) が成立.

従って, 三段論法により B が成立.

自動証明においても自然な証明への近接には上記E(key formula)をいかにうるかのアルゴリズムが問題となる。

本稿の変換アルゴリズムはこれに対する1つの解答を与えるものである。([2]によるLK証明図作成の前提の下で。)

§2 変換アルゴリズムの概要

(1) 論理式A_0に対し、"妥当性検証手続・証明図作成アルゴリズム"によって得る"$\to A_0$"に到るLK証明図はend sequentは→の右辺に唯1つの論理式A_0をもつにかゝわらず、証明図の中間には右辺に複数個の論理式をもつ非LJ型sequentが一般に現われる。そしてその原因は次の4種の非LJ型推論によって、右辺の論理式が上から下へと減少するからである。

cont.右 非LJ ¬右 非LJ ⊃右 非LJ cut

$$\frac{\Gamma \to \Delta, B, B}{\Gamma \to \Delta, B} \quad \frac{\Gamma \to \Delta, B}{\neg B, \Gamma \to \Delta} \quad \frac{\Gamma \to \Delta, B \quad C, \Gamma \to \Delta}{B \supset C, \Gamma \to \Delta} \quad \frac{\Gamma \to \Delta, B \quad B\,\Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

$(|\Delta| \geqq 0)$ $(|\Delta| \geqq 1)$ $(|\Delta| \geqq 1)$ $(|\Delta| \geqq 1)$

そこで、(LJ+排中律))証明図への変換アルゴリズムとしては、まず"$\to A_0$"に到るLK証明図から上記4種の右辺減少推論すべてを除き、結果としてLJ型sequentのみをもつ"$\to A_0$"に到る証明図へ変換しようとする。そしてこの変換消去の過程で"排中律の拡張としての$\to E \vee E'$ $(E' \equiv \neg E)$なる始式sequent"とそのcut推論(三段論法)による消去が自然な形で現われる。

そしてこの過程では LK^*[$=LK+(\to E\vee E'$型公理)] が用いられ，変換の結果得られる証明図は"$B\to B$型始式公理"と"$\to E\vee E'$型始式公理"から"LJ推論を用いて$\to A_0$に到るLJ^*[$=LJ+(\to E\vee E')$]証明図となる。そして更に$\to E\vee E'$の(LJ+排中律)証明図を始式$\to E\vee E'$の上に加えるならば，最終結果として"$\to A_0$"の(LJ+排中律)証明図を得ることが出来る。但し自然な見やすい証明というときは，この最終の結合を行わず"$\to A_0$に到る(LJ+($\to E\vee E'$))証明"までとし，別途"$\to E\vee E'$と$\to E'\equiv \neg E$が証明可能なことを付記するのがよいと考える。

(2) 右辺減少非LJ型推論の消去に用いる *lemma*

前項で述べた非LJ型推論の消去に次の"*sequent* 分離に対する証明図分離を導びく *lemma*"を用いる。

[*lemma*] $\underset{LK^*}{\vdash} \Gamma\to\Delta \cdots (*1)$ なるとき，$\Gamma\to\Delta$を2つの *sequent* $\Phi\to\Psi$，$\Theta\to\Sigma$に分離する($\Phi\subseteq\Gamma, \Psi\subseteq\Delta$; $\Theta=\Gamma-\Phi$, $\Sigma=\Delta-\Psi$).

このとき $E'\equiv\neg E$ なる2つの *formula* E, E'があって，$\underset{LK^*}{\vdash} E,\Phi\to\Psi \cdots (*2)$，$\underset{LK^*}{\vdash} E',\Theta\to\Sigma \cdots (*3)$ となる。更にこれは"(*1)に到る証明図$\mathbb{P}$"から"(*2), (*3)に到る証明図$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$"への次の(i), (ii)をみたす変換として実現される。

(i) "非LJ型の($\neg$左，$\supset$左，cut)推論は存在しない"という性質は保存される。

(ii) "contraction右の個数は$\mathbb{P}$内の合計と$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$内の合計は等しい。

(3) 上述の lemma を用いる非LJ型推論の消去は（第1段階）として，非LJ型（¬左，⊃左，cut）の消去を上から順次行い，その終了後（第2段階）として，contraction右の消去を下から順次行う方法による。消去の考え方を（第2段階）の場合に説明する。（但し，（第1段階）で lemma を用い非LJ型（¬左，⊃左，cut）は消去ずみとする。このとき，"$\to A_0$"に到る証明図の最下の contraction右…(I)は次の形をしている。

$$\mathbb{P}_0\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}\left\{\dfrac{\Gamma\to B,B \ \text{---}(*1)}{\Gamma\to B}\ \mathrm{I}\right. \\ \quad\ \vdots \\ \quad \to A_0\end{array}\right.$$

この(I)の上式"$\Gamma\to B,B$"を"$\to B$"と"$\Gamma\to B$"に分離する。$\Gamma\to B,B\cdots(*1)$に到る証明図 $\mathbb{P}$（第1段から非LJ（¬左，⊃左，cut）なし）に対し，(lemma)から dual な E，E' があって，"$E\to B\cdots(*2)$に到る LK^*証明図 $\mathbb{Q}$"と"$E',\Gamma\to B\cdots(*3)$に到る LK^*証明図 $\mathbb{R}$"が構成される。そして(i)から"非LJ型（¬左，⊃左，cut）なし"の性質が，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$に受けつがれ，(ii)から $\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$内の contration右の個数の合計は $\mathbb{P}$の個数と変らない。

従って下図のように，排中律的公理 $\to E\vee E'$ を用い I を消

$$\mathbb{P}_0'\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\mathbb{Q}\left\{\dfrac{E\to B\ \cdots(*2)}{E,\Gamma\to B}\right.\ \ \begin{matrix}\text{増左}\\ \text{換左}\end{matrix} \qquad \mathbb{R}\left\{E',\Gamma\to B\ \cdots(*3)\right.}{E\vee E',\Gamma\to B}\ (\vee\text{左})}{\Gamma\to B}\ (\text{LJ cut}) \\ \vdots \\ \to A_0\end{array}\right.$$

去するならば，証明図全体$\mathbb{P}_0'$としてはcontraction右の個数は1つ減少する。この過程を下方のcontraction右から順次適用すれば，それらのすべての消去が可能である。

(4) こゝに $E' \equiv \neg E$ であることから，$\to E \vee E'$ は排中律を意味すると考え，(*2)，(*3)に到る $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ は，"E，$\neg E$ のそれぞれの場合に分けて $\Gamma \to B$ を証明する"ことを意味し，更に"従って，常に $\Gamma \to B$ が成立する"と推論をすゝめることに対応する。この意味で，こゝに導入される"cut"も自然と考えられる。

更に $\to E \vee E'$ 自体の証明を (LJ+排中律)=$LJ^{\oplus}$ 体系で作成しうるので，これを(3)で述べた ($LJ + (\to E \vee E')$) 証明図に結合するならば，最終的に $LJ^{\oplus}$ への変換アルゴリズムも得る。

§3 sequent分離に対応する証明図分離のlemma

前"変換アルゴリズムの概要"の項に述べた非LJ型推論の消去に用いるlemmaを諸概念の定義と共にやゝ拡張した形で記述し，その証明を行う。

○ $\Gamma \to \Delta$ に到る LK^* 証明図とは $A_i \to A_i$ $(i=1,\cdots,k)$，$\to E_j \vee E_j'$ $(j=1,\cdots,l)$ なる形の公理sequentを最上部にもち，途中はLK推論によって $\Gamma \to \Delta$ を導びくsequentの樹状堆積である（またLJ^*証明図の定義は上記記述のLKをLJに変えて得る。）

○ $\Gamma \to \Delta$ に到る証明図$\mathbb{P}$を

$\mathbb{P}[\Gamma \to \Delta]$，または $\mathbb{P}\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \to \Delta \end{array} \right.$ 等とかく。

更に最下の推論Iに注目するときには，次のようにかく。

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\Gamma_1\to\Delta_1}{\Gamma\to\Delta}\right.\ \mathrm{I}\ (\text{非分岐型}),\quad \mathbb{P}\left\{\frac{\Gamma_1\to\Delta_1\quad \Gamma_2\to\Delta_2}{\Gamma\to\Delta}\right.\ \mathrm{I}\ (\text{分岐型})$$

○ "dual なformula"：論理記号⊃はなく，¬は素論理形式の前以外には現われない論理式Eに対し，E′をE内の∧，∨，∀，∃を∨，∧，∃，∀にそれぞれとりかえ，素論理形式の直前に¬があれば除き，なければ¬をつけ加えてうる論理式とする。このE′をEの"dual な論理式"と呼ぶ。但し以下では単にdual な論理式と略称する。勿論 $E''=E$，$E'\equiv\neg E$ である。

○ 親論理式：推論Iの下式の主論理式Cに対し上式の副論理式Dは親である。また推論図Iの下式の Γ，Δ，Π，Λ 等で書かれた列に属する論理式Cに対し上式の同じ式の同じ位置のCを親という。

○ sequent $\Gamma\to\Delta$ の分離

$\Phi\subseteq\Gamma$，$\Psi\subseteq\Delta$；$\Theta=\Gamma-\Phi$，$\Sigma=\Delta-\Psi$ のとき，"$\Phi\to\Psi$；$\Theta\to\Sigma$"を sequent $\Gamma\to\Delta$ の（$\Phi\to\Psi$ による）分離と呼び

$$\Gamma\to\Delta=(\Phi\to\Psi;\ \Theta\to\Sigma)$$ 等とかく。

[lemma] LK*証明図 $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ が与えられたとき，最下の sequent の分離 $\Gamma\to\Delta=(\Phi\to\Psi;\Theta\to\Sigma)$ に対し，ある1対の（dual な）論理式 E，E′（≡¬E）があって，2つのLK*証明図 $\mathbb{Q}[E,\Phi\to\Psi]$，$\mathbb{R}[E',\Theta\to\Sigma]$ を構成しうる。更に，

(ｲ) 「$\mathbb{P}$から（$\mathbb{Q}$；$\mathbb{R}$）の作成を変換とみるとき，非LJ型（¬左，

⊃左, cut)と contraction右 の推論の増加はない。』

(証明) $\mathbb{P}$, $\Gamma\to\Delta$ とその分離 $(\Phi\to\Psi;\ \Theta\to\Sigma)$ に対し, dual formula E, E' と2つの分離証明図 $\mathbb{Q}[E, \Phi\to\Psi]$, $\mathbb{R}[E', \Theta\to\Psi]$ を求める関数 $\mathbb{T}$ を $h(\mathbb{P})$ ($=\mathbb{P}$の高さ) により帰納的に定義する。また $\mathbb{T}: \mathbb{P} \Rightarrow (\mathbb{Q}; \mathbb{R})$ を変換とみるとき, (川) の成立を帰納的に確める。

1. $h(\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]) = 0$ のとき: $\Gamma\to\Delta$ は公理、従って、(1-1) $\Gamma\to\Delta = B\to B$, (1-2) $\Gamma\to\Delta = \to E\vee E'$ の2つの場合あり, それぞれ分離 $(\Phi\to\Psi;\ \Theta\to\Sigma)$ の形が4種と2種ある。

$$\mathbb{P} \xrightarrow{\mathbb{T}} \mathbb{Q}$$

$\mathbb{P}$ $\Gamma\to\Delta$	$(\Phi\to\Psi;\ \Theta\to\Sigma)$	$\mathbb{Q}$ $E, \Phi\to\Psi$	$\mathbb{R}$ $E', \Theta\to\Sigma$
1) $B\to B$	$(B\to B;\ \to\ )$	$t, B\to B$	$f\ \to$
2) 〃	$(B\to\ ;\ \to B)$	$\neg B, B\to$	$B\ \to B$
3) 〃	$(\ \to B;\ B\to\ )$	$B\ \to B$	$\neg B, B\to$
4) 〃	$(\ \to\ ;\ B\to B)$	$f\ \to$	$t, B\to B$
5) $\to E\vee E'$	$(\to E\vee E';\ \to\ )$	$t\ \to E\vee E'$	$f\ \to$
6) 〃	$(\ \to\ ;\ \to E\vee E')$	$f\ \to$	$t\ \to E\vee E'$

但し, t, f はそれぞれ $B\vee\neg B$, $B\wedge\neg B$ とする, いずれの場合も $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 欄は LJ 証明可能で, この修飾しうる LJ (従って LK*) 証明図 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ を上表の E, E' と共に $\mathbb{T}$ の値と定める。

1) の場合は:

$$\mathbb{Q}\left\{\dfrac{B\to B}{\underbrace{B\vee\neg B}_{E\,=\,t},\ B\to B}\right. \quad ; \quad \mathbb{R}\left\{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\to B}{\neg B, B\to}}{B\wedge\neg B, B\to}}{B, B\wedge\neg B\to}}{B\wedge\neg B, B\wedge\neg B\to}}{\underbrace{B\wedge\neg B}_{E'\,=\,f}\to}\right.$$

また, これら $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ に非LJ推論はないため (川) は成立している。

(2) $h(\mathbb{P}(\Gamma\to\Delta))>0$ のとき：$\mathbb{T}$ は 1) $\mathbb{T}\uparrow$, 2) $\mathbb{T}$, 3) $\mathbb{T}\downarrow$ の3つの部分に分け，この順に計算する。(但し 2) は再帰計算過程)

1) まず証明図 $\mathbb{P}$ と最下の式 $\Gamma\to\Delta$ の分離 $(\Phi\to\Psi;\Theta\to\Sigma)$ が与えられたとき，$\mathbb{P}$ の最下の推論 (I) $\dfrac{\Gamma_1\to\Delta_1\{;\Gamma_2\to\Delta_2\}}{\Gamma\to\Delta}$ に着目，上式 $\Gamma_i\to\Delta_i$ とそれに到る部分証明図 $\mathbb{P}_i$ をとり出す ($i=1\{,2\}$)。また $\Gamma\to\Delta$ の分離 $(\Phi\to\Psi;\Theta\to\Sigma)$ の $\Phi\to\Psi$ の方の親をたどり $\Gamma_i\to\Delta_i$ 内の $\Phi_i\to\Psi_i$ がきまり，$\Gamma_i\to\Delta_i$ の分離 $(\Phi_i\to\Psi_i;\Theta_i\to\Sigma_i)$ ($i=1\{,2\}$) がきまる。

分離により得られる2つの推論を J, K と indicate する。即ち，

(J) $\dfrac{\Phi_1\to\Psi_1\{;\Phi_2\to\Psi_2\}}{\Phi\to\Psi}$, (K) $\dfrac{\Theta_1\to\Sigma_1\{;\Theta_2\to\Sigma_2\}}{\Theta\to\Sigma}$. このような情報をとり出す関数を $\mathbb{T}\uparrow$ とする（下式分離から上式分離導入計算）。即ち，

$\mathbb{T}\uparrow(\mathbb{P},\Gamma\to\Delta,(\Phi\to\Psi;\Theta\to\Sigma))$

$=((\mathbb{P}_1,\Gamma_1\to\Delta_1,(\Phi_1\to\Psi_1;\Theta_1\to\Sigma_1))\{,(\mathbb{P}_2,\Gamma_2\to\Delta_2,(\Phi_2\to\Psi_2;\Theta_2\to\Sigma_2))\},$
$\mathrm{I},(\mathrm{J};\mathrm{K}))$.

ここに，(I) の主論理式が $\Phi\to\Psi$, $\Theta\to\Psi$ のいずれに属するかによって，① J=I, K: dummy または ② J: dummy, K=I となる。

2) 次に ($h(\mathbb{P}_i)<h(\mathbb{P})$ に注意し，) $\mathbb{P}_i$, $\Gamma_i\to\Delta_i$ とその分離 $(\Phi_i\to\Psi_i;\Theta_i\to\Psi_i)$ に $\mathbb{T}$ 自身を再帰適用する計算に進む。

$\mathbb{T}(\mathbb{P}_i,\Gamma_i\to\Delta_i,(\Phi_i\to\Psi_i;\Theta_i\to\Sigma_i))$

$=((\mathbb{Q}_i[E_i,\Phi_i\to\Psi_i],E_i),(\mathbb{R}_i[E_i',\Theta_i\to\Sigma_i],E_i'))$ ($i=1\{,2\}$).

3) すでに 2) で得られた2つの証明図 $\mathbb{Q}_i,\mathbb{R}_i$ 及び E_i, E_i' と 1) で得られた推論 J, K を用いて，目的の dual

formula E, E' と $\mathbb{P}$ の分離 $\mathbb{Q}[E, \Phi \to \Psi]$; $\mathbb{R}[E', \Theta \to \Sigma]$ を構成する. この関数を $\mathbb{T}\downarrow$ とする (証明図分離の下方延伸). 即ち,

$$\underline{\mathbb{T}\downarrow(((\mathbb{Q}_1, E_1); (\mathbb{Q}_2, E_2)), J), ((\mathbb{R}_1, E_1'); (\mathbb{R}_2, E_2')), K))}$$

$$= \left(E;\ \mathbb{Q}\left\{ (\mathbb{J})\ \frac{\mathbb{Q}_1\{E_1, \Phi_1 \to \Psi_1 \quad (\mathbb{Q}_2\{E_2, \Phi_2 \to \Psi_2)}{E, \Phi \to \Psi} \right. ;\right.$$

$$\left. E';\ \mathbb{R}\left\{ (\mathbb{K})\ \frac{\mathbb{R}_1\{E_1', \Theta_1 \to \Sigma_1 \quad (\mathbb{R}_2\{E_2', \Theta_2 \to \Sigma_2)}{E', \Theta \to \Sigma} \right. \right).$$

こゝに演繹過程の組 $(\mathbb{J}, \mathbb{K})$ は推論の組 (J, K) からきまる。従って I ($\mathbb{P}$ の最下の推論) からきまる.

以下 ① $(J, K) = (I, \text{dummy})$ or ② (dummy, I) に注意し

$\mathbb{T}\downarrow$ の定義を I の種類別に与える.

($\mathbb{T}\uparrow$ の定義は"親"の定義から確定する。) $\mathbb{T}$ における(小)の帰納的証明には $\mathbb{T}\downarrow$ の定義における I の種類別に次の(※)を確めればよい.

(※) $I \Rightarrow (\mathbb{J}, \mathbb{K})$ において, "(小)に記述の推論"の増加はない.

(A) I が非分岐のとき (このとき $\mathbb{Q}_2, \mathbb{R}_2$ はない).

(A-1) I が "$\forall$右, $\exists$左 以外の推論" かまたは "$\forall$右, $\exists$左 推論で eigen variable が E_1 にない (このとき E_1' にもない)" とき:

$E = E_1,\ E' = E_1'$ とし,

$$\mathbb{Q}\left\{ (J)\ \frac{\mathbb{Q}_1\{E_1, \Phi_1 \to \Psi_1}{\underset{\parallel}{E_1}, \Phi \to \Psi} \right. ;\ \mathbb{R}\left\{ (K)\ \frac{\mathbb{R}_1\{E_1', \Theta_1 \to \Sigma_1}{\underset{\parallel}{E_1'}, \Theta_1 \to \Sigma_1} \right.$$

$I \Rightarrow (\mathbb{J}, \mathbb{K}) (= (J, K))$ において(※)成立. 故に $\mathbb{P} \Rightarrow (\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ で(小)成立.

(A-2) I が $\forall$右 または $\exists$左 で E_1 (従って E_1') が eigen variable (α) を含むとき:

(i) (J, K) = (I, dummy) の場合: $\Theta_1 \to \Sigma_1$ ($= \Theta \to \Sigma$) には α なし.

$E = \forall_z E_1\binom{\alpha}{z}$, $E' = \exists_z E_1'\binom{\alpha}{z}$ とし, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ は次のようにする.

$$\mathbb{Q}\left\{(\mathbb{J})\left\{\begin{array}{l}(\forall\text{左})\\(\mathrm{J})\\ \ \ \|\\(\mathrm{I})\end{array}\right.\right. \dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\left\{E_1, \Phi_1 \to \Psi_1\right.}{\forall_z E_1\binom{\alpha}{z}, \Phi_1 \to \Psi_1}}{\forall_z E_1\binom{\alpha}{z}, \Phi \to \Psi} \quad ; \quad \mathbb{R}\left\{(\mathbb{K}):(\exists\text{左})\ \dfrac{\mathbb{R}_1\left\{E_1', \Theta_1 \to \Sigma_1\right.}{\exists_z E_1'\binom{\alpha}{z}, \Theta \to \Sigma}\right.$$

(※) の成立は明らか.

(ii) (J, K) = (dummy, I) の場合: (i) の記述において, 次のとりかえをすればよい.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} \mathrm{J} & \mathbb{J} & E & E_1 & \mathbb{Q} & \mathbb{Q}_1 & \Phi & \Phi_1 & \Psi & \Psi_1 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathrm{K} & \mathbb{K} & E' & E_1' & \mathbb{R} & \mathbb{R}_1 & \Theta & \Theta_1 & \Sigma & \Sigma_1 \end{array}\right).$$

(B) I が分岐推論のとき: (このとき, $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{Q}_2$ あり.)

(B-1) I が cut 以外 ($\wedge$右, $\vee$左, $\supset$左) のとき:

(i) (J, K) = (I, dummy) のとき: $E = E_1 \wedge E_2$, $E' = E_1' \vee E_2'$ とし,

$$\mathbb{Q}\left\{(\mathbb{J})\left\{\begin{array}{l}(\wedge\text{左})\\(\mathrm{J})\\ \ \ \|\\(\mathrm{I})\end{array}\right.\right. \dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\left\{E_1, \Phi_1 \to \Psi_1\right.}{E_1 \wedge E_2, \Phi_1 \to \Psi_1} \quad (\wedge\text{左})\dfrac{\mathbb{Q}_2\left\{E_2, \Phi_2 \to \Psi_2\right.}{E_1 \wedge E_2, \Phi_2 \to \Psi_2}}{\underbrace{E_1 \wedge E_2}_{E}, \Phi \to \Psi}$$

$$\mathbb{R}\left\{(\mathbb{K}):(\vee\text{左})\ \dfrac{\mathbb{R}_1\left\{E_1', \Theta_1 \to \Sigma_1\right. \quad \mathbb{R}_2\left\{E_2', \Theta_2 \to \Sigma_2\right.}{\underbrace{E_1' \vee E_2'}_{E'}, \Theta \to \Sigma}\right.$$

($\Theta_1 \to \Sigma_1 = \Theta_2 \to \Sigma_2 = \Theta \to \Sigma$).

(ii) (J, K) = (dummy, I) のとき: (i) の記述において (A-2)(ii) と同様なとりかえを行う. 但し $\mathbb{Q}_2 \leftrightarrow \mathbb{R}_2$, $\Phi_2 \leftrightarrow \Theta_2$, $\Psi_2 \leftrightarrow \Sigma_2$ を追加.

(※)の成立も明らかである。

(B-2) I が cut のとき: $\mathbb{P}$ は次のようにかける.

$$\mathbb{P}\left\{(\mathrm{I})\ \dfrac{\mathbb{P}_1\{\Gamma_1 \to \Delta_1^*, D \qquad \mathbb{P}_2\{D, \Gamma_2^* \to \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \to \Delta_1^*, \Delta_2}\ (\mathrm{cut})\right.$$

$\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, \Gamma_2^* \to \Delta_1^*, \Delta_2$ の分離 $= (\Phi \to \Psi\,;\ \Theta \to \Sigma)$ につき

Φ の Γ_1, Γ_2^* 部分を Φ_1, Φ_2 ; Ψ の Δ_1^*, Δ_2 部分を Ψ_1, Ψ_2 とおく.
Θ の Γ_1, Γ_2^* 部分を Θ_1, Θ_2^* ; Σ の Δ_1^*, Δ_2 部分を Σ_1^*, Σ_2 とおく.

$\mathbb{T}\uparrow$ の定義から, $\begin{cases} \Gamma_1 \to \Delta_1^*, D \text{ の分離は } (\Phi_1 \to \Psi_1\,;\ \Theta_1 \to \Sigma_1^*, D), \\ D, \Gamma_2^* \to \Delta_2 \text{ の分離は } (\Phi_2 \to \Psi_2\,;\ D, \Theta_2^* \to \Sigma_2). \end{cases}$

それぞれに $\mathbb{T}$ を適用. $\left.\begin{cases} \text{dual } E_1, E_1' \text{ と } \mathbb{P}_1 \Rightarrow (\mathbb{Q}_1\,;\ \mathbb{R}_1) \\ \text{dual } E_2, E_2' \text{ と } \mathbb{P}_2 \Rightarrow (\mathbb{Q}_2\,;\ \mathbb{R}_2) \end{cases}\right\}$ をうる。

そこで、この場合の $\mathbb{T}\downarrow$ の定義は次のようにする。

$E = E_1 \vee E_2,\ E' = E_1' \wedge E_2'$ とし, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ は次のようにする。

$$\mathbb{Q}\left\{(\vee\text{左})\ \dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\{E_1, \Phi_1 \to \Psi_1}{E_1, \Phi_1, \Phi_2 \to \Psi_1, \Psi_2} \quad \begin{pmatrix}\text{weak.左右} \\ \text{exch.左右}\end{pmatrix} \quad \dfrac{\mathbb{Q}_2\{E_2, \Phi_2 \to \Psi_2}{E_2, \Phi_1, \Phi_2 \to \Psi_1, \Psi_2}}{E_1 \vee E_2, \underbrace{\Phi_1, \Phi_2}_{\Phi} \to \underbrace{\Psi_1, \Psi_2}_{\Psi}}\right\}(\mathbb{J})\ .$$

$$\mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix}\text{exch.左} \\ \wedge\text{左} \\ \text{cont.左}\end{pmatrix} \dfrac{(\mathrm{I})\ \dfrac{\mathbb{R}_1\{E_1', \Theta_1 \to \Sigma_1^*, D \qquad \dfrac{\mathbb{R}_2\{E_2', D, \Theta_2^* \to \Sigma_2}{D, E_2', \Theta_2^* \to \Sigma_2}\ (\text{exch.左})}{E_1', \Theta_1, E_2', \Theta_2^* \to \Sigma_1^*, \Sigma_2}\ (\mathrm{cut})}{E_1' \wedge E_2', \underbrace{\Theta_1, \Theta_2^*}_{\Theta} \to \underbrace{\Sigma_1^*, \Sigma_2}_{\Sigma}}\right\}(\mathbb{K})$$

$\mathrm{I} \Longrightarrow (\mathbb{J}, \mathbb{K})$ において, 増加する推論に(+)に記述のものなし.
従って(※)成立.

§4 LK証明図の $(LJ + (\to E^{\vee}E'))(= LJ^{*})$ 証明図への変形アルゴリズム

論理式 A_0 のLK証明図 $\mathbb{P}_0[\to A_0]$ に対し前節で示したlemmaを用い、(第1段) $\mathbb{P}_0$ 内の非LJ型($\neg$左, $\supset$左, cut)を上から順次消去した証明図 $\mathbb{S}_0[\to A_0]$ を作り、(第2段) $\mathbb{S}_0$ 内のcontraction右を下から順次消去し目的の証明図を作る。

(第1段) $\mathbb{P}_0[\to A]$ 内の非LJ型($\neg$左, $\supset$左, cut)の最上部の1つ I に着目、I の上部を $\mathbb{P}_1$ とする。

(Case 1) I：非LJ型$\neg$左：$\mathbb{P}_1$ 最下式 $\Gamma\to\Delta, B$ を $(\to B;\ \Gamma\to\Delta)$ と分離、lemmaを適用してうる証明図を $\mathbb{Q}_1[E_1\to B]$, $\mathbb{R}_1[E_1', \Gamma\to\Delta]$ とする。

$$\mathbb{P}_0\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}_1\{\ \vdots \\ \text{(I)}\ \dfrac{\Gamma\to\Delta, B}{\neg B, \Gamma\to\Delta}\quad (|\Delta|\geq 1) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0 \end{array}\right.$$

$\mathbb{P}_1$ に非LJ型($\neg$左, $\supset$左, cut)なし、故に $\mathbb{Q}_1, \mathbb{R}_1$ も同じ性質をもつ。かつcontraction右の個数は不変。

$$\mathbb{P}_0'\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\to E^{\vee}E' \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\{E\to B}{\neg B\ E\to}\ (\text{I}')\ (\text{LJ型}\neg\text{左})}{E, \neg B, \Gamma\to\Delta} \qquad \dfrac{\mathbb{R}_1\{E', \Gamma\to\Delta}{E', \neg B, \Gamma\to\Delta}}{E^{\vee}E', \neg B, \Gamma\to\Delta}\ (\vee\text{左})}{\neg B, \Gamma\to\Delta}\ (\text{LJ型 cut}) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0 \end{array}\right.$$

(weak.'s, exch.'s)

左図のように推論を追加し、$\mathbb{P}_0'$ とすれば、非LJ型($\neg$左, $\supset$左, cut)は1つだけ減少する。(IがLJ型のI'となる。)

(Case 2) Iが非LJ型$\supset$左のとき：Iの左上部 $\mathbb{P}_1[\Gamma\to\Delta, B]$ につき $\Gamma\to\Delta, B$ の分離 $(\to B;\ \Gamma\to\Delta)$ にlemmaを適用、$\mathbb{Q}_1, \mathbb{R}_1$ をうる。

$$\mathbb{P}_0\left\{\begin{array}{l} \text{(I)}\ \dfrac{\mathbb{P}_1\{\Gamma\to\Delta, B \qquad C\ \Gamma\to\Delta\}\mathbb{P}_2}{B\supset C, \Gamma\to\Delta}\ (\supset\text{左})\quad (|\Delta|\geq 1) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0 \end{array}\right.$$

これらと$\mathbb{P}_2$を用いて$\mathbb{P}_0'$を下のように構成。

$$
\mathbb{P}_0'\left\{
\dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\mathbb{Q}_1}{E\to B} \qquad \overset{(※)}{B, B\supset C\to C}}{E, B\supset C\to C}\,(LJ\,cut) \qquad \overset{\mathbb{P}_2}{C, \Gamma\to\Delta}}{E, B\supset C, \Gamma\to\Delta}\,(LJ\,cut) \qquad \dfrac{\overset{\mathbb{R}_1}{E', \Gamma\to\Delta}}{E', B\supset C, \Gamma\to\Delta}\left(\begin{matrix}\text{Weak.左}\\ \text{exch.左}\end{matrix}\right)}{E\vee E', B\supset C, \Gamma\to\Delta}\,(\vee\text{左})}{\begin{matrix}B\supset C, \Gamma\to\Delta\\ \vdots\\ \to A\text{。}\end{matrix}}\,(LJ\,cut)
\right.
$$

[(※)はLJで証明可能, LJ(左)は含む]

$\mathbb{P}_0\Rightarrow\mathbb{P}_0'$の変形によって, 非LJ型(¬左, ⊃左, cut)のうち非LJ型⊃左(I)が1つ減少する。(contraction右の個数は不変.)

(Case 3) Iが非LJ型cutのとき: $\mathbb{P}_1$の最下式$\Gamma\to\Delta, B$の分離$(\to B\,;\,\Gamma\to\Delta)$にlemmaを適用し, $\mathbb{Q}_1[E\to B]$; $\mathbb{R}_1[E', \Gamma\to\Delta]$をうる。

$$
\mathbb{P}_0\left\{
\begin{matrix}
\dfrac{\overset{\mathbb{P}_1}{\Gamma\to\Delta, B} \qquad \overset{\mathbb{P}_2}{B, \Pi\to\Lambda}}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda \quad (|\Delta|\geqq 1)}\,(\mathrm{I})\\
\vdots\\
\to A_0
\end{matrix}
\right.
$$

これを用いて, $\mathbb{P}_0'$のように変形すれば, 非LJ型cut(I)は消去され, 目的を達する。

$$
\mathbb{P}_0'\left\{
\begin{matrix}
\dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\mathbb{Q}_1}{E\to B} \qquad \overset{\mathbb{P}_1}{B, \Pi\to\Lambda}}{E, \Pi\to\Lambda}\,(\mathrm{I}')}{E, \Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda} \qquad \dfrac{\overset{\mathbb{R}_1}{E', \Gamma\to\Delta}}{E', \Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}}{E\vee E', \Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}\,(LJ\,cut)\\
\vdots
\end{matrix}
\right.
$$

(LJ cut)

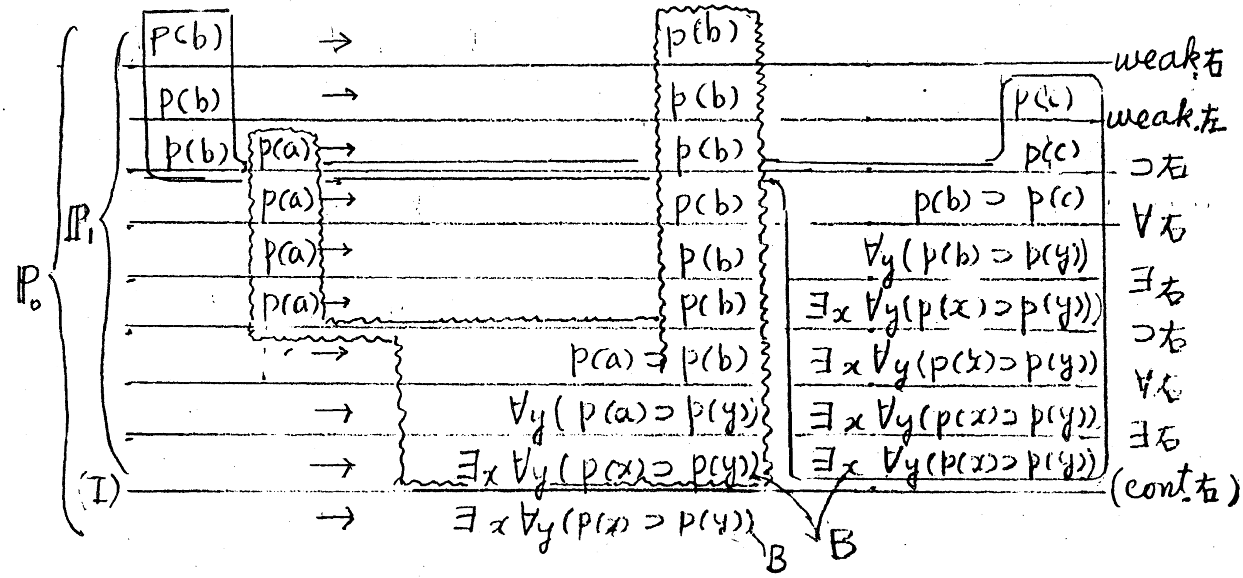
$\left(\begin{matrix}\text{Weak 左右}\\ \text{exch. 左右}\end{matrix}\right)$

(第2段) 第1段で得た$\mathbb{S}_0[\to A_0]$に対し, 更にcontraction右を, 下方から順次消去し, LJ^*証明図とする手続は**2**(3)の通りである。

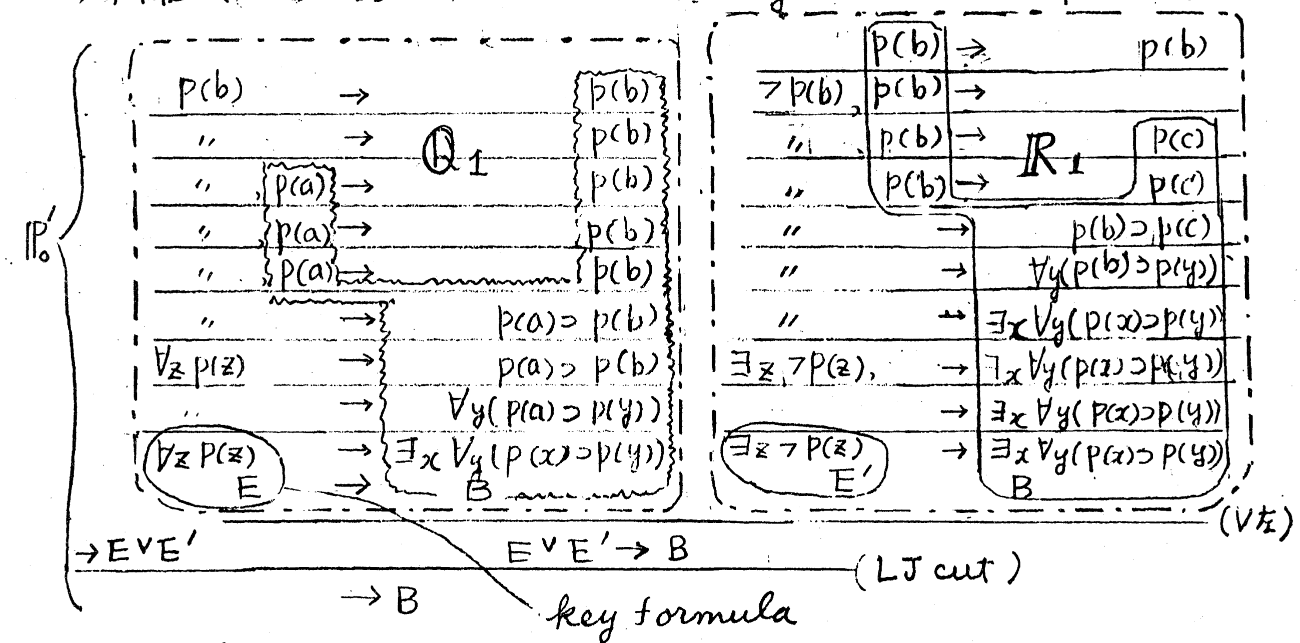
§**5** 非LJ型推論の消去と*key formula*生成の例

すでに**1**.で述べた$B = \exists_x\forall_y(p(x)\supset p(y))$の証明を自動証明により近接する。

(1) 始め、[2]によるプログラムによりcut-free LK証明図$\mathbb{P}_0$を作成。



(2) これに4のLJ* = (LJ + (→E∨E'))証明図$\mathbb{P}_0'$への変換を行う。$\mathbb{P}_0$の非LJ型推論の原因としては、最下のcont.右のみ。この上式：→B, B の分離 (→B;→B)にlemmaを適用。Key formula E = ∀z p(z)を得る。



参考文献

[1] T. OSHIBA: A Method for Obtaining Proof Figures in the First Order Predicate Calculus, Comm. Math. Univ. St. Pauli, Vol. 30, No. 1, pp 49-62 (1981)

[2] 大芝猛: guide情報を利用する証明のプログラム, 数理科学, No. 270, pp56-68 (1985)